ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

Fondée en 1949 — Reconnue par l'État
Diplôme visé par le Ministère de l'Éducation Nationale
1, Rue Bougainville — 75007 PARIS

Tél. : 45 51 32 59

MERCREDI 26 MAI 1993

CONCOURS D'ADMISSION

SESSION DE 1993

MATHEMATIQUES 2ème EPREUVE

Options Générale, Economique, Technologique

DUREE 2 H (11H - 13H00)

Sont autorisées : - Règles graduées.
- Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

EXERCICE N° 1

Une urne contient a boules blanches et n boules noires. Dans tout l'exercice a est un entier fixé supérieur ou égal à 1 et n est un entier naturel.
Un joueur tire des boules au hasard dans l'urne, l'une après l'autre. Lorsqu'une boule a été tirée elle n'est pas remise dans l'urne.
On désigne par X_n la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première boule blanche.

1° Quel est, en fonction de n, l'ensemble des valeurs de la variable X_n ?

2° On suppose $n \geq 1$. Calculer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

3° a) Expliciter soigneusement l'événement $(X_n = k)$. En déduire la loi de la variable X_n.

b) Démontrer, pour $n \geq 0$ et $k \geq 1$, la formule :

$$P(X_{n+1} = k+1) = \frac{n+1}{a+n+1} \cdot P(X_n = k).$$

X_{n+1} : nombre de tirages nécessaires pour l'obtention d'une première boule blanche, l'urne contenant a boules blanches et n+1 boules noires.

4° $E(X_n)$ désigne l'espérance mathématique de X_n.

a) Calculer $E(X_0)$, $E(X_1)$ et $E(X_2)$.

b) Pour $n \geq 0$ établir la relation :

$$E(X_{n+1}) = \frac{n+1}{a+n+1} \cdot E(X_n) + 1.$$

c) En déduire $E(X_n)$ en fonction de a et de n.

EXERCICE N° 2

On considère la fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et définie pour $x \neq 0$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

1° a) Calculer f (0) et étudier la dérivabilité de f en 0.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a :

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

2° Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-nx}\, dx$$

a) Montrer que cette intégrale est convergente.

b) Montrer que pour $n \geq 1$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$

En déduire que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

3° Montrer que pour $n \geq 1$ on a :

$$f(x) = f(x)\, e^{-nx} + \sum_{k=1}^{n} x.\, e^{-kx}$$

En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

EXERCICE N° 3

On considère que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1° a) Calculer A^2 et A^3.

Montrer que $A^3 - 3A + 2I = 0$

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}

2° Soit n un entier naturel. Montrer que A^n est de la forme :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}$$

où a_n est un entier relatif.

Démontrer la relation : $a_{n+1} = 3 - 2a_n$.

En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

3° La formule donnant A^n est-elle encore valable si n est un entier relatif ?